

第4讲 二次函数实际问题

用二次函数的图象和性质解决实际问题：

首先应按题意建立合适的函数关系式，特别注意_____和_____表示的实际意义；

然后再利用二次函数的图象和性质解决所求问题．

二次函数在实际中的应用主要有以下两个方面：

（1）结合二次函数的图象求最值问题．这类问题解题时往往会使用配方法去求二次函数图象的顶点式，主要的题型有：

①二次函数与面积最大化问题

②二次函数与利润增长率问题

（2）利用二次函数优化构建坐标系解决实际问题．这类问题解题时往往需要根据题目的要求自己建立平面直角坐标系，再利用二次函数的性质解题，主要类型有：

①二次函数与拱桥问题

②二次函数与投篮、喷泉类问题

一、最值应用问题

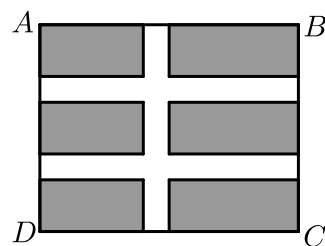
1. 面积问题

面积最大值问题，一般先应用几何图形的面积公式，写出图形的面积与边长之间的关系，列出方程，按照二次函数求最大值的方法，结合二次函数性质和自变量的取值范围确定最大面积．

【注意】_____的取值范围

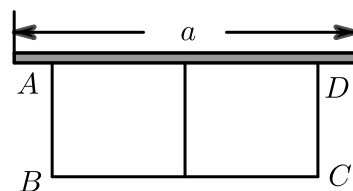
🍎 举个“栗”子

1. 如图，为美化中心城区环境，政府计划在长为30米，宽为20米的矩形场地 $ABCD$ 上修建公园．其中要留出宽度相等的三条小路，且两条与 AB 平行，另一条与 AD 平行，其余部分建成花圃．



- (1) 若花圃总面积为448平方米，求小路宽为多少米？
- (2) 已知某园林公司修建小路的造价 y_1 （元）和修建花圃的造价 y_2 （元）与修建面积 s （平方米）之间的函数关系分别为 $y_1 = 40s$ 和 $y_2 = 35s + 20000$ ．若要求小路宽度不少于2米且不超过4米，求小路宽为多少米时修建小路和花圃的总造价最低？

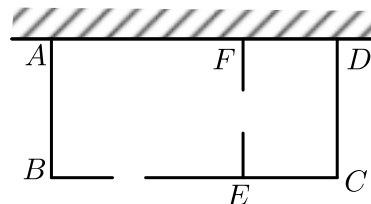
2. 如图，有长为24m的篱笆，现一面利用墙（墙的最大可用长度 a 为9m）围成中间隔有一道篱笆的长方形花圃，设花圃的宽 AB 为 x m，面积为 S m²．



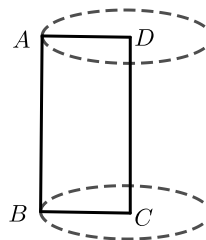
- (1) 求 S 与 x 的函数关系式及 x 值的取值范围．
- (2) 要围成面积为36m²的花圃， AB 的长是多少米．
- (3) 当 AB 的长是多少米时，围成的花圃面积最大．

 变式（开门型）

3. 一农户用篱笆及一面墙（该墙可用最大长度为36米）围成一个矩形场地 $ABCD$ ，该场地中间隔有一道与 AB 平行的篱笆（ EF ），如图， BE 、 EF 上各留有1米宽的门（门不需要篱笆），该农户共用篱笆58米，设该矩形的一边 AB 长 x 米， $AD > AB$ ，矩形 $ABCD$ 的面积为 S 平方米，



- (1) 求出 S 与 x 的函数关系式，直接写出自变量 x 的取值范围．
- (2) 若矩形 $ABCD$ 的面积为252平方米，求 AB 的长．
- (3) 怎样围才能是围成的场地面积最大？最大面积是多少？
4. 如图，已知矩形 $ABCD$ 的周长为36cm，矩形绕它的一条边 CD 旋转形成一个圆柱．设矩形的一边 AB 的长为 x cm ($x > 0$)，旋转形成的圆柱的侧面积为 S cm²．



- (1) 用含 x 的式子表示：
- 矩形的另一边 BC 的长为 _____ cm，
- 旋转形成的圆柱的底面圆的周长为 _____ cm．
- (2) 求 S 关于 x 的函数解析式及自变量 x 的取值范围．
- (3) 求当 x 取何值时，矩形旋转形成的圆柱的侧面积最大．
- (4) 若矩形旋转形成的圆柱的侧面积等于 18π cm²，则矩形的长是 _____ cm，宽是 _____ cm．

2. 利润问题

利润问题通常是先求两个变量之间的一次函数关系，再求二次函数关系，然后转化为二次函数的最值，利用图象解决问题。

【注意】_____的取值范围

常用公式：

- ① 利润率=_____；
- ② 每件利润=_____；
- ③ 销售额=_____；
- ④ 总利润=_____；

栗子

5. 已知超市中某商品的进价为每件20元，售价为每件30元，每个月可卖出180件，如果每件商品的售价每上涨1元，则每个月就会少卖出10件，但每件售价必须低于34元，设每件商品的售价上涨 x 元（ x 为非负整数），每个月的销售利润为 y 元．
- （1）求 y 与 x 的函数关系式，并直接写出自变量 x 的取值范围．
 - （2）利用函数关系式求出每件商品的售价为多少元时，每个月可获得最大利润？最大利润是多少？
 - （3）利用函数关系式求出每件商品的售价定为多少元时，每个月的利润恰好是1920元？这时每件商品的利润率是多少？

栗子

6. 某商店销售一种销售成本为每件40元的玩具，若按每件50元销售，一个月可售出500件．销售价每涨1元，月销售量就减少10件．设销售价为每件 x 元（ $x \geq 50$ ），月销量为 y 件，月销售利润为 w 元．
- （1）当销售价为每件60元时，月销量为 _____ 件，月销售利润为 _____ 元．
 - （2）写出 y 与 x 的函数解析式和 w 与 x 的函数解析式．
 - （3）当销售价定为每件多少元时会获得最大利润？求出最大利润．

栗子

7. 某公司为一工厂代销一种建筑材料（这里的代销是指厂家先免费提供货源，待货物售出后再进行结算，未售出的由厂家负责处理）．当每吨售价为260元时，月销售量为45吨．该经销店为提高经营利润，准备采取降价的方式进行促销．经市场调查发现：当每吨售价每下降10元时，月销售量就会增加7.5吨．综合考虑各种因素，每售出一吨建筑材料共需支付厂家及其它费用100元．设每吨材料售价为 x （元），该经销店的月利润为 y （元）．
- （1）当每吨售价是240元时，计算此时的月销售量．
 - （2）求出 y 与 x 的函数关系式（不要求写出 x 的取值范围）．
 - （3）该经销店要获得最大月利润，售价应定为每吨多少元？
 - （4）小静说：“当月利润最大时，月销售额也最大．”你认为对吗？请说明理由．

二、建立直角坐标系解决问题

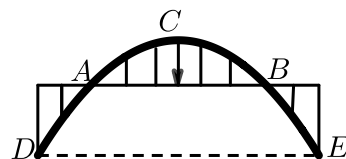
1. 拱桥问题

利用二次函数解决抛物线的隧道、大桥和拱门等实际问题时，要恰当地把这些实际问题中的数据落实到平面直角坐标系中的抛物线上，从而确定抛物线所对应的函数解析式，通过解析式解决一些测量问题或其他问题。

【注意】构建二次函数模型时，**建立适当的平面直角坐标系**是关键。

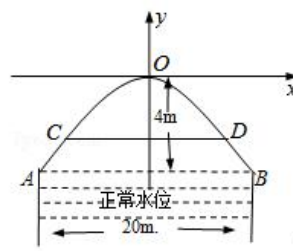
栗子

8. 如图是我省某地一座抛物线形拱桥，桥拱在竖直平面内，与水平桥面相交于 A 、 B 两点，拱桥最高点 C 到 AB 的距离为 9m ， $AB = 36\text{m}$ ， D 、 E 为拱桥底部的两点，且 $DE \parallel AB$ ，点 E 到直线 AB 的距离为 7m ，则 DE 的长为 _____ m 。



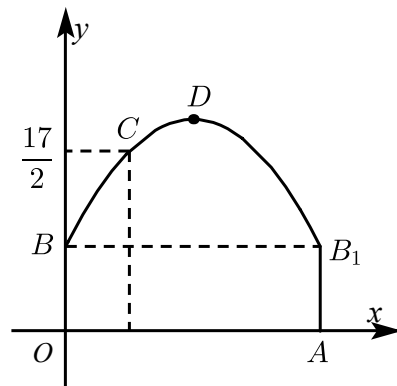
栗子

9. 有一座抛物线形拱桥，在正常水位 AB 时，桥下水面宽度为 20m ，拱顶距水面 4m 。



- (1) 求出该抛物线的解析式。
- (2) 设正常水位时，桥下的水深为 1.8m ，为保证过往船只顺利航行，桥下水面宽度不得小于 18m ，求水深超过多少米时，就会影响过往船只在桥下顺利航行。

10. 如图，隧道的截面由抛物线和长方形构成，长方形的长是12m，宽是4m．按照图中所示的直角坐标系，抛物线可以用 $y = -\frac{1}{6}x^2 + bx + c$ 表示，且抛物线的点C到墙面OB的水平距离为3m时，到地面OA的距离为 $\frac{17}{2}$ m．



- (1) 求该抛物线的函数关系式，并计算出拱顶D到地面OA的距离．
- (2) 一辆货运汽车载一长方体集装箱后高为6m，宽为4m，如果隧道内设双向行车道，那么这辆货车能否安全通过？
- (3) 在抛物线型拱壁上需要安装两排灯，使它们离地面的高度相等，如果灯离地面的高度不超过8m，那么两排灯的水平距离最小是多少米？

2. 轨迹问题

此题型将运动路线抽象为所给直角坐标系中的抛物线，正确地建立二次函数模型，准确地将已知数据转化为点的坐标，用待定系数法求出解析式，通过解析式解决一些测量问题或其他问题．

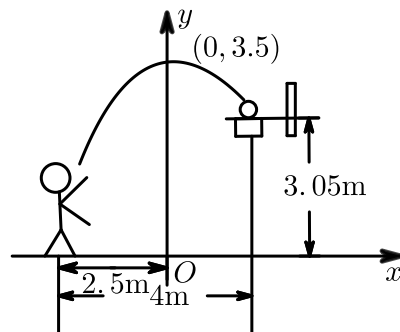
栗子

11. 运动会上，某运动员掷铅球时，所掷的铅球的高 $y(\text{m})$ 与水平的距离 $x(\text{m})$ 之间的函数关系式为

$$y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}, \text{ 则该运动员的成绩是 () .}$$

- A. 6m B. 12m C. 8m D. 10m

12. 一位篮球运动员在距离篮圈中心水平距离4m处起跳投篮，球沿一条抛物线运动，当球运动的水平距离为2.5m时，达到最大高度3.5m，然后准确落入篮筐内．已知篮圈中心距离地面高度为3.05m，在如图所示的平面直角坐标系中，下列说法正确的是（ ）．



- A. 此抛物线的解析式是 $y = -\frac{1}{5}x^2 + 3.5$ B. 篮圈中心的坐标是 $(4, 3.05)$
 C. 此抛物线的顶点坐标是 $(3.5, 0)$ D. 篮球出手时离地面的高度是2m
13. 如图，以40m/s的速度将小球沿与地面成某一角度的方向击出时，小球的飞行路线将是一条抛物线．如果不考虑空气阻力，小球的飞行高度 h （单位：m）与飞行时间（单位：s）之间具有函数关系 $h = 20t - 5t^2$ ．请解答以下问题：



- （1）小球的飞行高度能否达到15m？如果能，需要多少飞行时间？
 （2）小球的飞行高度能否达到20.5m？为什么？
 （3）小球从飞出到落地要用多少时间？